

Non-Eksistensi Pemaksimum Luas Permukaan Grafik

di Bawah Kendala Kurvatur Gauss

Gregorius Willson - Universitas Bina Nusantara - Binus4

22 Mei 2026

Pesan utama. Jika soal dibaca secara literal, tanpa syarat batas seperti $f|_{\partial D_R} = 0$, jawaban utamanya bukan menemukan fungsi maksimum, melainkan membuktikan bahwa fungsi pemaksimum *tidak ada*. Untuk setiap $R > 0$, supremum luas permukaan adalah $+\infty$. Kendala $0 \leq K \leq 1$ membatasi kurvatur Gauss, tetapi tidak membatasi kemiringan grafik ketika $K = 0$.

1 Formulasi Masalah

Untuk setiap $R > 0$,

$$D_R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq R^2\}. \quad (1)$$

Untuk menjaga pembacaan klasik tetap eksplisit, kita bekerja pada kelas

$$\mathcal{C}_R = \left\{ f \in C^2(\overline{D_R}) : 0 \leq \frac{\det(D^2 f)}{(1 + \|\nabla f\|^2)^2} \leq 1 \text{ pada } D_R \right\}. \quad (2)$$

Kelas ini sedikit lebih kuat daripada frasa soal yang hanya meminta turunan kedua kontinu di interior; penguatan ini tidak melemahkan kesimpulan non-eksistensi, karena keluarga pembanding yang dipakai di bawah bahkan merupakan polinomial. Untuk $f \in \mathcal{C}_R$, luas grafik $z = f(x, y)$ adalah

$$S(f) = \iint_{D_R} \sqrt{1 + \|\nabla f\|^2} \, dx \, dy. \quad (3)$$

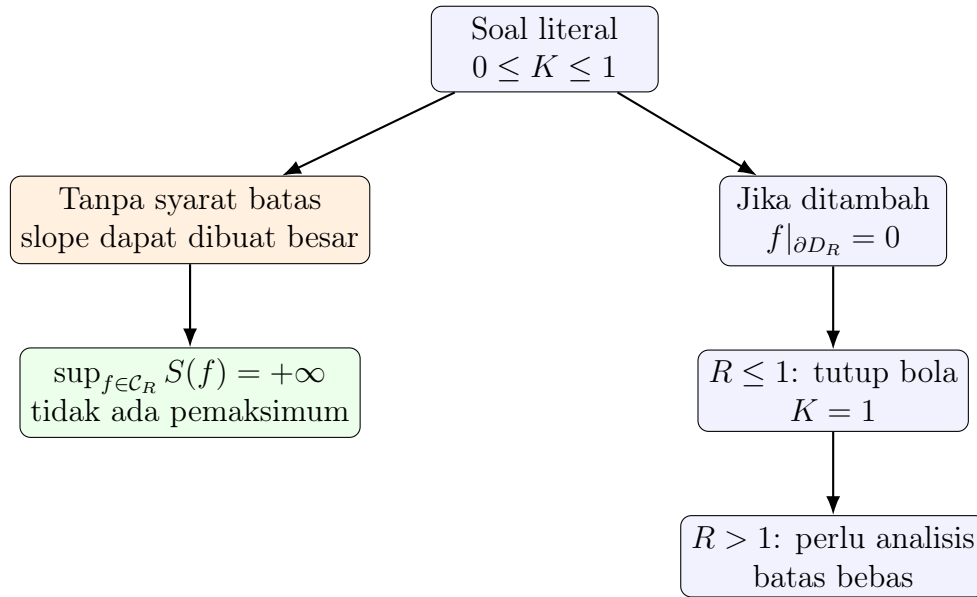
Syarat kurvatur pada soal dapat ditulis sebagai

$$0 \leq \frac{\det(D^2 f)}{(1 + \|\nabla f\|^2)^2} \leq 1. \quad (4)$$

Dalam koordinat, $\det(D^2 f) = f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2$. Jadi ekspresi di tengah pada (4) adalah kurvatur Gauss grafik:

$$K = \frac{\det(D^2 f)}{(1 + \|\nabla f\|^2)^2}. \quad (5)$$

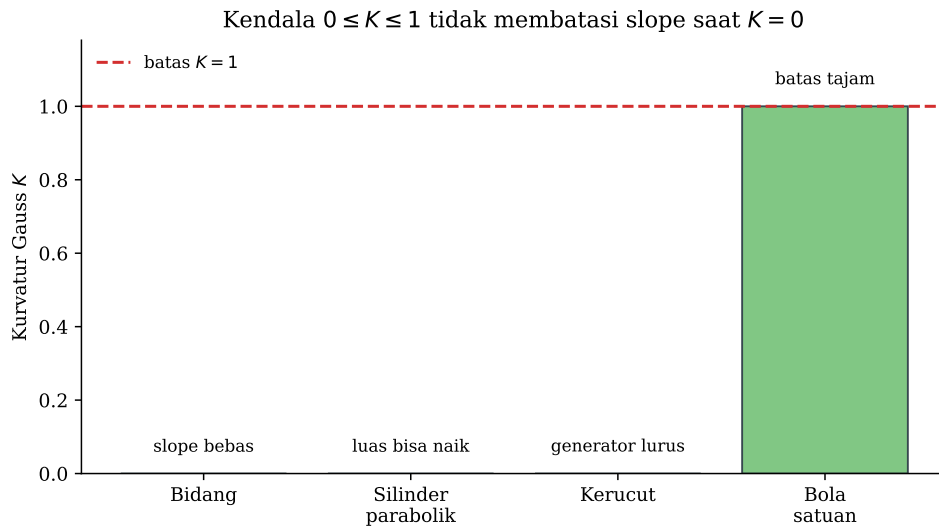
Jadi syarat soal adalah $0 \leq K \leq 1$, sebagaimana dinyatakan dalam (4).



Gambar 1: Peta keputusan. Kesimpulan literal soal berada di cabang kiri; cabang kanan berguna sebagai interpretasi tambahan bila ada syarat batas Dirichlet.

2 Intuisi Geometris Kendala

Kendala $K \leq 1$ pada (4) membuat bola satuan menjadi pembanding alami, sebab bola berjari-jari 1 memiliki $K = 1$. Akan tetapi, permukaan dengan $K = 0$ masih diperbolehkan. Inilah celah utama: kurvatur Gauss nol tidak berarti luas kecil. Bidang miring, silinder parabolik, dan kerucut dapat memiliki $K = 0$ sambil memiliki gradien besar.



Gambar 2: Kendala kurvatur membedakan *cara melengkung*, bukan langsung membatasi besar kemiringan. Karena itu, mode $K = 0$ dapat dipakai untuk membuat luas permukaan membesar.

3 Kesimpulan Literal: Luas Tidak Terbatas

Teorema 3.1 (Tidak ada pemaksimum untuk soal literal). Untuk setiap $R > 0$, kelas admissible klasik $\mathcal{C}_R$ pada (2) tidak memiliki pemaksimum luas permukaan. Lebih kuat

lagi,

$$\sup_{f \in \mathcal{C}_R} S(f) = +\infty. \quad (6)$$

Bukti. Ambil barisan fungsi

$$f_n(x, y) = nx^2, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (7)$$

Fungsi pada (7) adalah polinomial, sehingga semua turunan parsial keduanya kontinu. Kita punya

$$f_x = 2nx, \quad f_y = 0, \quad f_{xx} = 2n, \quad f_{yy} = 0, \quad f_{xy} = 0. \quad (8)$$

Dengan mensubstitusikan (8) ke rumus kurvatur Gauss (5), diperoleh

$$K_n = \frac{(2n)(0) - 0^2}{(1 + 4n^2x^2)^2} = 0. \quad (9)$$

Jadi setiap f_n pada (7) memenuhi $0 \leq K_n \leq 1$.

Namun luasnya, berdasarkan definisi luas (3), adalah

$$S(f_n) = \iint_{D_R} \sqrt{1 + 4n^2x^2} \, dx \, dy. \quad (10)$$

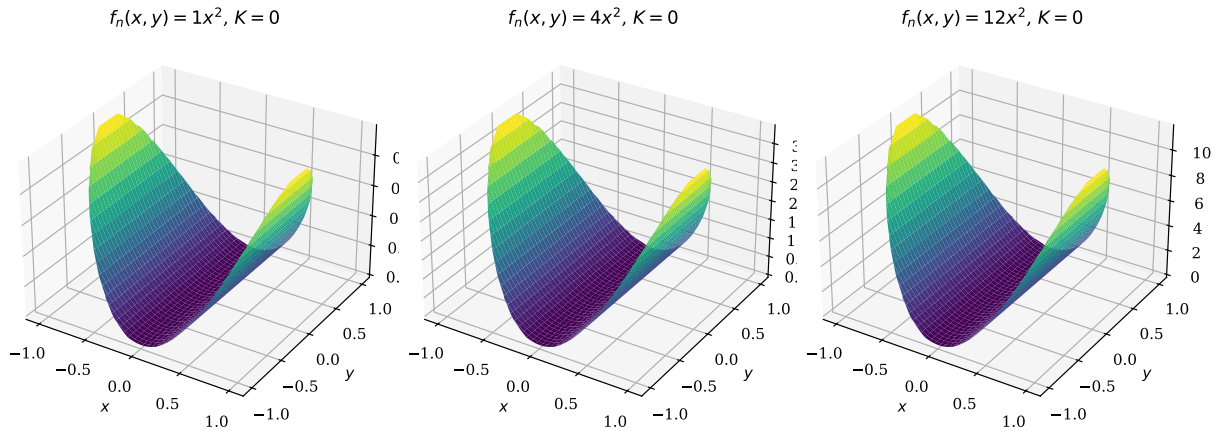
Karena $\sqrt{1 + 4n^2x^2} \geq 2n|x|$, dari (10) diperoleh batas bawah

$$S(f_n) \geq \iint_{D_R} 2n|x| \, dx \, dy. \quad (11)$$

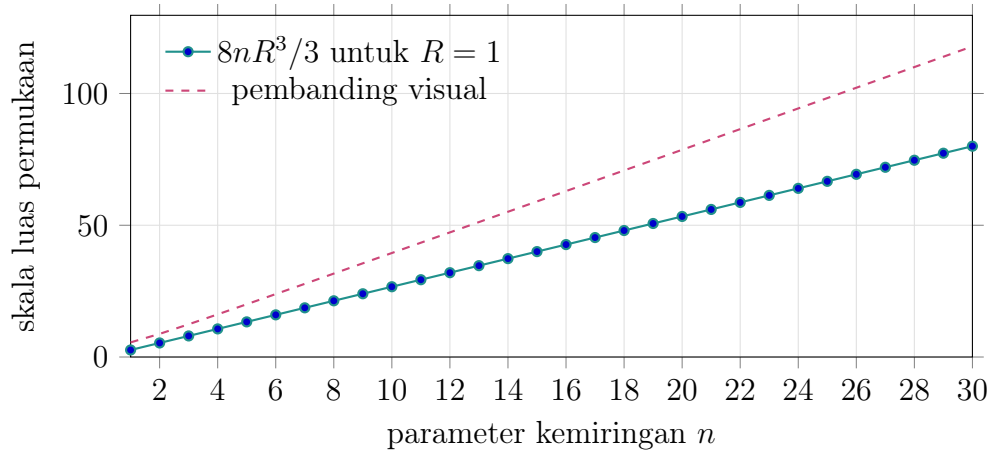
Dengan koordinat polar, $x = r \cos \theta$, sehingga

$$\iint_{D_R} 2n|x| \, dx \, dy = 2n \int_0^R r^2 \, dr \int_0^{2\pi} |\cos \theta| \, d\theta = \frac{8nR^3}{3}. \quad (12)$$

Dari (11) dan (12), diperoleh $S(f_n) \geq \frac{8nR^3}{3} \rightarrow +\infty$. Maka $S(f_n) \rightarrow +\infty$ dalam arti luasnya tidak terbatas ke atas, sesuai klaim (6). Jadi tidak mungkin ada fungsi pemaksimum. $\square$



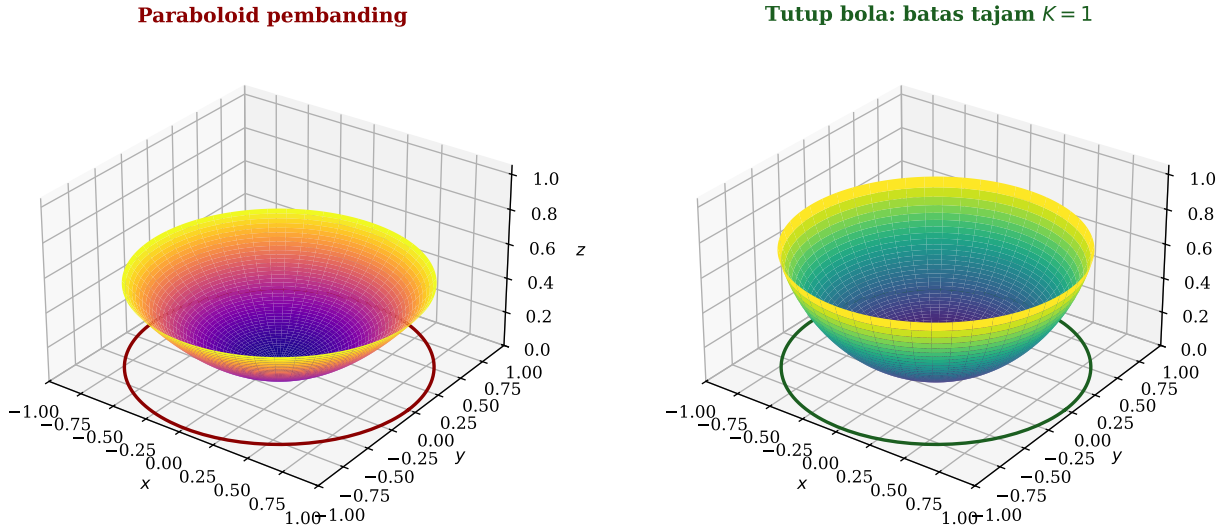
Gambar 3: Konstruksi $f_n(x, y) = nx^2$. Semua permukaan ini memiliki $K = 0$, tetapi kemiringan dan luasnya makin besar ketika n diperbesar.



Gambar 4: Batas bawah luas tumbuh linear terhadap n . Ini cukup untuk membuktikan supremum tak hingga pada setiap cakram D_R dengan $R > 0$.

4 Mengapa Tutup Bola Tetap Penting?

Walaupun bukan solusi literal tanpa syarat batas, tutup bola satuan adalah visual pembandingan yang sangat informatif. Jika masalah dimodifikasi dengan syarat batas tambahan, misalnya grafik diikat di tepi, maka permukaan dengan $K = 1$ menjadi kandidat ekstrem alami.



Gambar 5: Perbandingan geometri: paraboloid dapat menjadi pembandingan visual, tetapi tutup bola satuan adalah permukaan yang menekan batas kurvatur $K = 1$ secara tajam.

Untuk fungsi radial

$$f(x, y) = g(r), \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad u(r) = g'(r), \quad (13)$$

diperoleh

$$\|\nabla f\|^2 = u(r)^2, \quad \det(D^2 f) = \frac{u(r)u'(r)}{r}. \quad (14)$$

Karena itu, dengan mensubstitusikan (14) ke (5),

$$K = \frac{u(r)u'(r)}{r(1 + u(r)^2)^2}. \quad (15)$$

Jika $K \leq 1$ dan $u(0) = 0$, maka dari (15) secara formal diperoleh

$$\frac{u \, du}{(1 + u^2)^2} \leq r \, dr, \quad (16)$$

sehingga setelah diintegalkan dari 0 sampai r ,

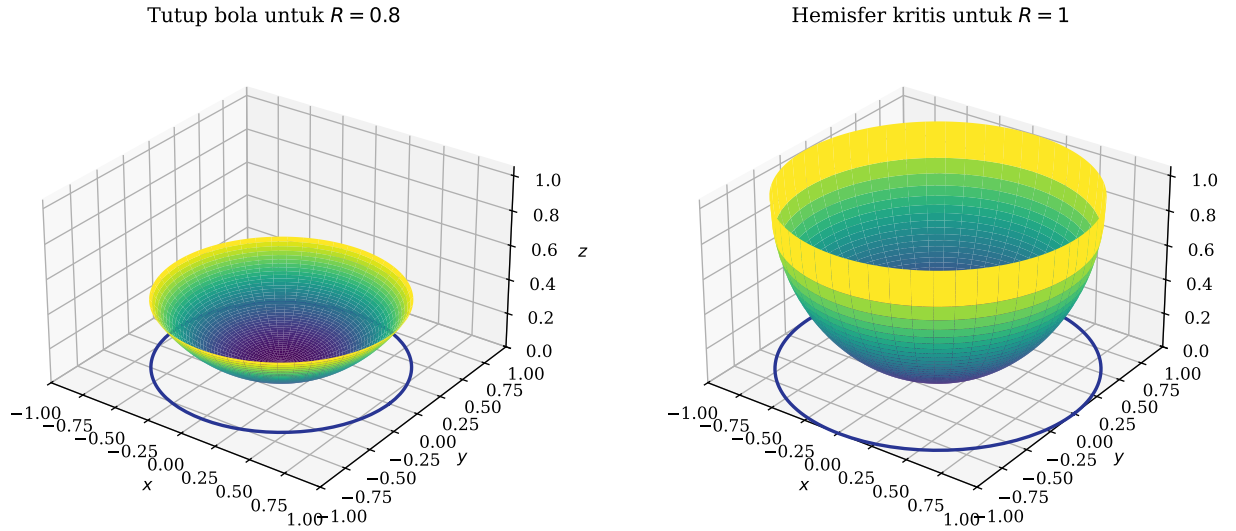
$$\frac{u(r)^2}{1 + u(r)^2} \leq r^2. \quad (17)$$

Untuk $0 \leq r < 1$, pertidaksamaan (17) memberi

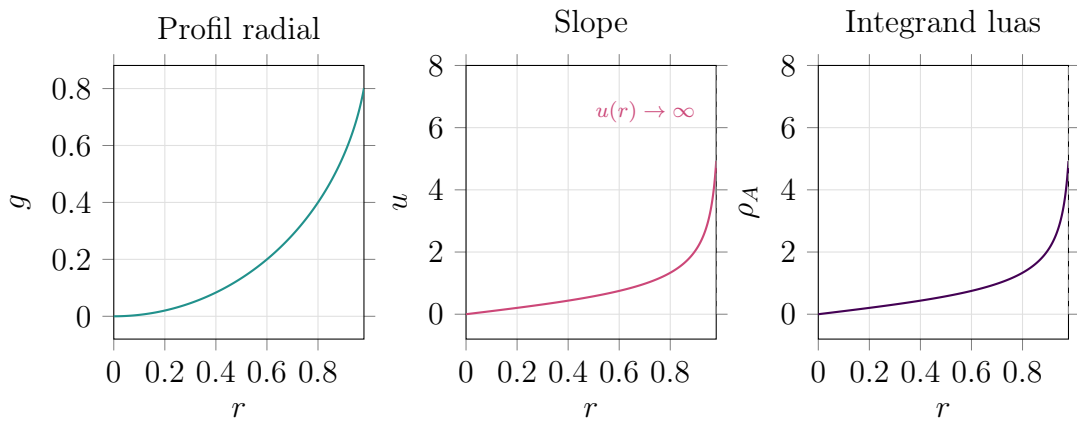
$$u(r) \leq \frac{r}{\sqrt{1 - r^2}}. \quad (18)$$

Batas (18) dicapai oleh tutup bola satuan

$$g(r) = 1 - \sqrt{1 - r^2}. \quad (19)$$



Gambar 6: Tutup bola satuan untuk dua radius penting. Saat $R < 1$, cap masih memiliki slope terbatas di tepi; saat $R = 1$, cap mencapai hemisfer kritis dan slope menjadi tak terbatas di batas.



Gambar 7: Profil radial tutup bola: tinggi $g(r)$, slope $u(r)$, dan integrand luas radial $\rho_A(r) = r\sqrt{1 + u(r)^2}$. Ledakan slope saat $r \rightarrow 1$ menandai radius kritis bola satuan.

5 Catatan Tambahan: Varian dengan Syarat Batas Dirichlet

Bagian ini bukan bagian dari solusi utama soal sebagaimana tertulis. Catatan ini hanya membantu membaca geometri masalah bila ada syarat tambahan yang tidak tercantum, misalnya grafik yang “diikat” di batas dengan $f = 0$ pada ∂D_R .

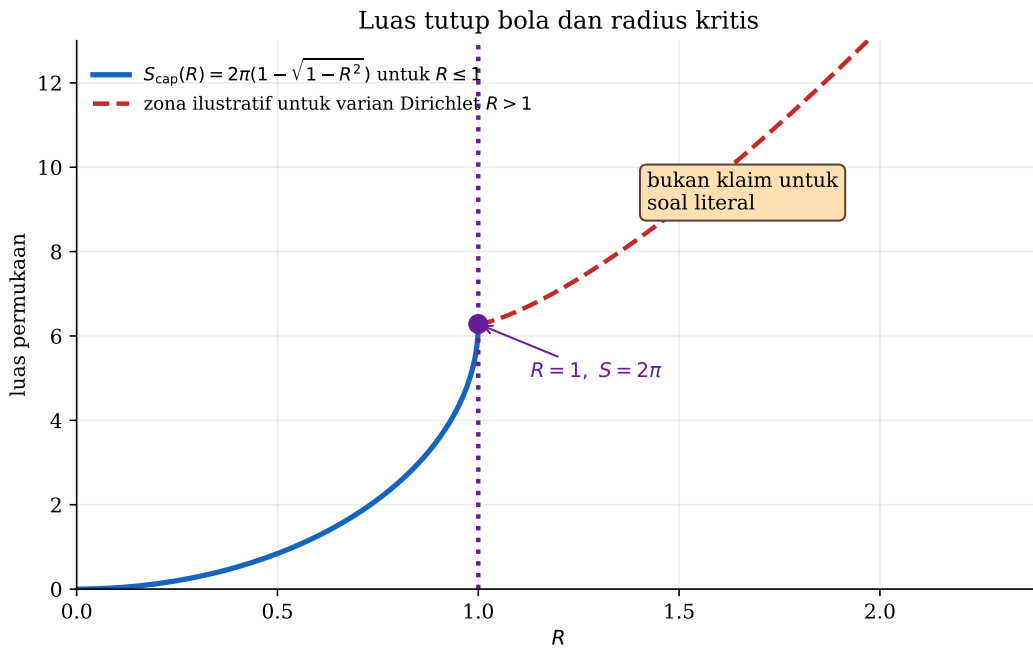
5.1 Kasus radius kecil

Untuk $0 < R \leq 1$, tutup bola satuan yang digeser agar bernilai nol di tepi adalah

$$f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2} - \sqrt{1 - R^2}. \quad (20)$$

Permukaan (20) mempunyai $K = 1$ pada interior dan memenuhi syarat batas $f = 0$ pada ∂D_R . Luas tutup bola di atas cakram berjari-jari R adalah

$$S_{\text{cap}}(R) = 2\pi \int_0^R \frac{r}{\sqrt{1 - r^2}} dr = 2\pi \left(1 - \sqrt{1 - R^2}\right). \quad (21)$$



Gambar 8: Grafik luas tutup bola untuk varian Dirichlet ketika $R \leq 1$. Bagian merah hanya ilustrasi bahwa kasus $R > 1$ memerlukan model tambahan; ia bukan klaim untuk soal literal tanpa syarat batas.

5.2 Kasus radius besar

Untuk $R > 1$, satu tutup bola unit seperti (20) tidak dapat menutup seluruh cakram sampai tepi dengan cara yang sama. Secara geometris, kandidat ekstrem untuk problem Dirichlet akan menyerupai gabungan zona: inti dengan K besar, daerah transisi halus, lalu bagian luar yang makin mendatar atau menyerupai rok. Analisis rigornya membutuhkan persamaan Monge–Ampere

$$\det(D^2 f) = K(x, y) (1 + \|\nabla f\|^2)^2, \quad 0 \leq K(x, y) \leq 1, \quad (22)$$

bersama batas bebas yang menentukan di mana daerah $K = 1$ harus berhenti dan di mana daerah transisi mulai muncul. Secara analitik, jika profil radial dipaksa tetap menjenuhkan $K = 1$, persamaan (17) menjadi identitas dan menghasilkan $u(r) = r/\sqrt{1-r^2}$; gradien ini singular saat $r \uparrow 1$. Karena itu, untuk radius besar $R > 1$, solusi Dirichlet yang halus tidak dapat berupa satu fase $K = 1$ sampai ∂D_R ; ia harus menurunkan kurvatur sebelum radius kritis tersebut atau memasuki rezim batas bebas. Catatan ini tidak boleh disamakan dengan kesimpulan literal Teorema 3.1 dan (6).

6 Ringkasan untuk Penilaian

Pembacaan masalah	Status luas maksimum	Ide kunci
Literal, tanpa syarat batas	Tidak ada; $\sup_{f \in \mathcal{C}_R} S(f) = +\infty$	$f_n = nx^2$ memberi $K = 0$
Dengan $f = 0$ di batas, $R \leq 1$	Kandidat alamiah: tutup bola	$K = 1$ konstan
Dengan $f = 0$ di batas, $R > 1$	Masalah batas bebas	Inti bola + transisi halus

Tabel 1: Perbedaan asumsi mengubah jawaban. Karena soal yang diberikan tidak menyebut syarat batas, jawaban literalnya adalah non-eksistensi pemaksimum.

Korolar 6.1. Untuk soal sebagaimana tertulis, jawaban akhirnya adalah

$$\boxed{\text{Untuk setiap } R > 0, \quad \sup_{f \in \mathcal{C}_R} S(f) = +\infty \text{ dan pemaksimum tidak ada.}} \quad (23)$$

Catatan 6.2. Visualisasi di atas sengaja memisahkan dua hal: bukti literal menggunakan permukaan $K = 0$ dengan slope besar, yaitu (7)–(12), sedangkan tutup bola menjelaskan intuisi geometris dari batas $K = 1$ melalui (19) dan (20). Pemisahan ini penting agar solusi tampak kuat: menarik secara visual, tetapi tetap setia pada hipotesis soal.